【1】

中身がそれぞれ空である白い箱と黒い箱が1個ずつある。また，互いに区別のつかない球が十分多くある。1から6の目をもつ1つのさいころを1回投げるごとに，出た目が偶数であれば白い箱に目の数に等しい個数の球を入れ，出た目が奇数であれば黒い箱に目の数に等しい個数の球を入れる。ただし，1度箱に入れた球は取り出さない。さいころを3回続けて投げたとき，白い箱に入っている球の個数をn_{W}，黒い箱に入っている球の個数をn_{B}として，以下の各問いの空欄に適する1以上の整数を解答欄に記入せよ。ただし，分数は既約分数として表すこと。

問1　$n_{\mathrm{B}}=4$となる確率は$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$である。

問2　$n_{\mathrm{B}}=3$となる確率は$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$である。

問3　$n_{\mathrm{W}}=8$となる確率は$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$である。

問4　$n_{\mathrm{W}}=8$という条件の下で，$n_{\mathrm{B}}\neq 0$となる条件つき確率は$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$である。

【2】

O を原点とするxy平面上の曲線C_1：$y=f(x)=\dfrac{4}{5}x^3-\dfrac{3}{5}x-\dfrac{1}{5}\ (-1\leqq x\leqq 2)$，と曲線$C_{2,\,k}$：$y=g_k(x)=x^3-\dfrac{2k+3}{5}x^2+\dfrac{2k}{5}x-\dfrac{2}{5}\ (-1\leqq x\leqq 2)$(ただし，$k$は0以上の定数)の共有点の個数を$N(k)$とおく。このとき，以下の各問いに答えよ。問4については導出過程も記せ。

問1　$f(x)=0$を満たすx(ただし，$-1\leqq x\leqq 2$)の値をすべて求めよ。答えのみでよい。

問2　曲線C_1の概形を図示せよ。凹凸や変曲点は調べなくてよい。答えのみでよい。

問3　問1で求めた各xに対して，$g_k(x)$の値を求めよ。答えのみでよい。

問4　$N(k)$を求めよ。

【3】

O を原点とする座標空間において, 1 辺の長さが 1 である正四面体を OABC とする。$0 < x < 1$ を満たす x に対して, 辺 AB を $x : (1-x)$ に内分する点を D とし, 辺 BC を $x : (1-x)$ に内分する点を E とする。また，線分 AE と線分 CD の交点を P とおき，直線 OE 上の点 Q を $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BE}$ となるようにとる。△APC の面積を S とし, △OAQ の面積を T とする。このとき, 以下の各問いに答えよ。問 4 については導出過程も記せ。

問 1　S を x を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2　$|\overrightarrow{OE}|$ を x を用いて表せ。答えのみでよい。

問 3　$r = x(1-x)$ とおくとき，T を r のみを用いて表せ。答えのみでよい。

問 4　x を $0 < x < 1$ の範囲で動かすとき，$\dfrac{S}{T^2}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

【4】

以下の各問いに答えよ。問 2(2)，問 3 については導出過程も記せ。

問 1　次の定積分の値を求めよ。答えのみでよい。

$$\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+4}$$

問 2　$n = 0, 1, 2, \cdots$ とするとき，$0 < a < 1$ を満たす a に対し

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{x^{3n}}{1-x^3}\,dx$$

とおく。

(1)　次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$0 \leqq I_n(a) \leqq \frac{a^{3n+1}}{(1-a^3)(3n+1)}$$

(2)　$I_n(a) - I_{n+1}(a)$ を n と a のみを用いて表せ。

問 3　次の無限級数は収束する。その和を求めよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}\left(\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\right)^n$$