

【1】

以下の設問(1)~(3)の ア ~ オ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) $\frac{\sin 65^\circ + \sin 55^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 40^\circ}$ の値を求めると ア である。

(2) 直線 $x + y = a$ が楕円 $C : x^2 + 2y^2 = 20$ の接線となるのは $a = \pm$ イ のときである。これらの接線に垂直となる C の接線は 2 本ある。これら 4 本の接線で囲まれた部分の面積は ウ である。

(3) 正の整数 n に対して \sqrt{n} の整数部分を a_n で表す。例えば $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_5 = 2$ である。正の整数 k に対して、 $a_n = k$ となる n の個数を k を用いて表すと エ となる。また、 $\sum_{n=1}^{2023} a_n$ を求めると オ となる。

【2】

$z \neq 1$ なる複素数 z に対して

$$f(z) = \frac{z}{z-1}$$

と定める。また、 $z \neq -1$ なる複素数 z に対して

$$g(z) = \frac{-z}{z+1}$$

と定める。

(1) 複素数 z を $z = x + yi$ (x, y は実数, i は虚数単位) で表す。i), ii) の カ ~ ク に当てはまる適切な選択肢を(a)~(h)より選び、その記号を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

i) $|f(z)| = |g(z)|$ が成り立つための z の必要十分条件は カ である。

ii) $z \neq 0$ とする。 $\arg \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\pi}{2}$ が成り立つための z の必要十分条件は キ

かつ ク である。

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x > 0$ (d)

$$y > 0$$

$$(e) \quad x < 0 \qquad (f) \quad y < 0 \qquad (g) \quad x^2 + y^2 = 1 \qquad (h) \quad x^2 + y^2 = 2$$

(2) $z \neq -1$ かつ $g(z) \neq 1$ である z に対して,

$$h(z) = f(g(z)) = \frac{g(z)}{g(z) - 1}$$

と定める。i)~iii)の ~ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

i) $z = h(z)$ を満たす複素数は $z =$ である。

ii) $z_1 = 2$ として,

$$z_{n+1} = h(z_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。数列 $\{z_n\}$ の一般項を n を用いて表すと $z_n =$ $\frac{2}{\quad}$ である。

iii) 複素数平面において、点 1 を中心とする半径 1 の円 C_1 の周上を点 z が動くとき、 $w = h(z)$ で定まる点 w のえがく図形 C_2 は点 を中心とする半径 の円となる。

同様に $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して、図形 C_{n+1} を「点 z が C_n の周上を動くとき、 $w = h(z)$ で定まる点 w のえがく図形」と定義する。図形 C_n は点 を中

心とする半径 の円となる。

【3】

n を正の定数とし、 $n > a > 0$ とする。関数 $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ に対して、関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x)^a (1 - f(x))^{n-a}$$

とおく。以下の設問(1)~(3)の ソ ~ ト にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) x が実数全体を動くとき、 $f(x)$ のとりうる値の範囲は

$$\text{ソ} < f(x) < \text{タ}$$

である。また、 $f(x) = \frac{1}{2}$ となる x の値は チ である。

(2) $g(x)$ が最大となる x の値は ツ であり、その最大値 L を n と a を用い

て表すと テ である。

(3) (2) で求めた L を a の関数と考える。 a が $n > a > 0$ の範囲を動くとき、 L の最小値は ト である。

【4】

以下の設問(1)の ナ , ニ にあてはまる適切な数と(2)に対する解答を解答用紙の所定の欄に記載せよ。

(1) 赤玉 6 個、白玉 5 個を入れてよくかき混ぜた箱がある。この箱から 4 個の玉を同時にとり出す。

i) とり出した 4 個の玉のうち赤玉がちょうど 2 個となる確率は ナ である。

ii) とり出した 4 個の玉に赤玉が 1 個以上含まれる確率は ニ である。

(2) n は 40 以上の整数とする。白玉だけが n 個入った箱があり、この箱から 40 個の玉をとり出し、しるしをつけてから箱に戻してよくかき混ぜる。この箱から 20 個の玉を同時にとり出すとき、とり出した 20 個の玉のうち 3 個にしるしがついている確率を $L(n)$ で表す。 $L(n)$ を最大にする n を求めよ。なお求める過程も記載すること。