【１】

袋の中に赤玉 3 個と白玉 3 個が入っており，袋の外に白玉がたくさんある。この袋の中から 1 個の玉を取り出して色を確認し，赤玉ならその玉の代わりに袋の外の白玉を 1 つ袋に入れ，白玉ならその玉を袋に戻す。

この操作を繰り返し，袋の中の玉がすべて白玉になるか，または白玉を取り出した回数の合計が 2 回になったところで操作を終了する。

(1)　2 個目の玉を取り出したところで操作が終了となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

3 個目の玉を取り出したところで操作が終了となる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ である。

(2)　4 個目の玉を取り出し, かつその玉が 3 個目の赤玉である確率は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}$ である。

(3)　4 個目の玉を取り出し操作が終了となったとき，白玉が袋から連続して取り出されている条件付き確率は $\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サシ}}$ である。

【２】

xy 平面上の楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ は円 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 倍したものである。C の 2 つの焦点のうち，x 座標が負であるものを $\mathrm{F_1}$，正であるものを $\mathrm{F_2}$ とする。また C と y 軸との 2 つの交点のうち，y 座標が負であるものを A とするとき， $\mathrm{F_1A}=2\sqrt{5}$ が成り立っている。

このとき， $r=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ であり， $\mathrm{F_1}$ の座標は $(-\sqrt{\boxed{ウ}},\ 0)$ である。

(1)　直線 $\mathrm{F_1A}$ に平行な楕円 C の接線のうち，y 切片が正であるものを l とすると，l の方程式は $y=-\sqrt{\boxed{エ}}\,x+\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である。

また，P を楕円 C 上の点とするとき，三角形 $\mathrm{F_1AP}$ の面積の最大値は

$$\frac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}(\sqrt{\boxed{ケ}}+1)}{2}$$

であり，このとき点 P の x 座標は $\boxed{コ}$ である。

(2)　Q を楕円 C 上の第 1 象限の点とする。三角形 $\mathrm{QF_1F_2}$ の内心を I とし，点 Q, 点 I の y 座標をそれぞれ y_Q， y_I とするとき

$$y_\mathrm{Q}=\boxed{サ}\,y_\mathrm{I}$$

が成り立つ。

また，点 $(0,\ y_\mathrm{Q})$ を焦点，直線 $y=y_\mathrm{I}$ を準線とする放物線が点 Q を通るとき

$$y_Q = \frac{\boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$$

である。

【３】

空間内に平行四辺形ABCDを底面とする四角錐O－ABCDがあり，平行四辺形ABCDは$AC=\sqrt{61}$，$BD=\sqrt{21}$を満たしている。また，線分ACと線分BDの交点をHとすると，直線OHは平面ABCに垂直で

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{2},\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{19}{2},\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{25}{2}$$

が成り立っている。このとき

$$OA=\sqrt{\boxed{アイ}},\quad OB=\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}},\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\boxed{オカ}$$

である。

(1)　$AB=\boxed{キ}$，$BC=\boxed{ク}$である。

また，平行四辺形ABCDの面積をSとすると，$S=\boxed{ケコ}\sqrt{\boxed{サ}}$である。

(2)　線分OAの中点をP，線分OBを3 : 1に内分する点をQ，線分ODを1 : 3に内分する点をRとし，平面PQRと直線OCの交点をTとする。$\overrightarrow{OT}$を$\overrightarrow{OC}$を用いて表すと$\overrightarrow{OT}=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{スセ}}\overrightarrow{OC}$である。線分PTと線分QRの交点をUとするとき，$\overrightarrow{OU}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$を用いて表すと

$$\overrightarrow{OU}=\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タチ}}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$$

である。

また，$\overrightarrow{UO}\cdot\overrightarrow{UD}=w_1$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=w_2$とするとき

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{\boxed{ツテト}}{\boxed{ナニ}}$$

である。

【4】

n を正の整数とする。関数 $f_n(x)$ を

$$f_1(x)=\cos x,$$

$$f_{n+1}(x)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x(\sin x-\sin t)f_n(t)\,dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}f_n(t)\,dt,\quad b_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin t)f_n(t)\,dt$$

によって定義すると

$$a_1=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad b_1=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},$$

$$a_{n+1}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}a_n-\frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}b_n,$$

$$b_{n+1}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}a_n-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}b_n$$

である。よって

$$a_{n+2}=-\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}a_n$$

が成り立つ。

(2)　n が奇数のとき

$$f_n(x)=\left(-\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}\right)^{\boxed{\text{テ}}}\cos x$$

であり，n が偶数のとき

$$f_n(x)=\left(-\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}\right)^{\boxed{\text{ト}}}\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}\sin 2x-\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\cos x\right)$$

である。

ただし，$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ にはそれぞれ最も適切なものを次の⓪から⑦のうちから選べ。

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$\frac{n}{2}-1$

⑤　$\frac{n-1}{2}$　　⑥　$\frac{n}{2}$　　⑦　$\frac{n+1}{2}$