1. 無重力の真空中にある xy 平面内で，原点Oのまわりを運動する小球Aを考える（図1参照）。小球Aは大きさを無視できる質量 m の質点として扱い，その位置，速度，小球Aが受ける力をそれぞれベクトル $\vec{r}=(x,y)$, $\vec{v}=(v_x,v_y)$, $\vec{F}=(F_x,F_y)$ で表す。なお，小球Aの運動は光速 c に比べて十分遅いものとし，問1から問4までは小球Aは帯電していないものとして答えよ。

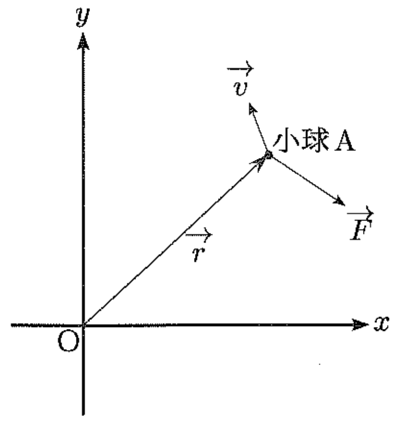

図1

問 1.　太陽系の惑星の運動に関するケプラーの第2法則は

「惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に描く面積は一定である」

というものである。太陽を座標原点Oに，惑星を小球Aにおきかえるならば，この法則は $\vec{r}$ と $\vec{v}$ を2辺とする平行四辺形の面積が時間とともに変わらないことを主張する。ここで $J=m(xv_y-yv_x)$ と定義される量を考える。この量は「小球Aの原点Oのまわりの角運動量」と呼ばれる量で，以下では簡単に「角運動量 J」と呼ぶことにする。すると，ケプラーの第2法則は角運動量 J の保存を主張するといえることを，J の表式に $\vec{r}=(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, $\vec{v}=(v\cos\beta, v\sin\beta)$ を具体的に代入して計算することにより説明せよ。さらに加えて，J の正負が小球Aの運動について何を表すかも述べること。ここに r は小球Aの原点Oからの距離，v は小球Aの速さ，α と β はそれぞれ $\vec{r}$ と $\vec{v}$ が x 軸の正の向きとなす角である。

問 2.　角運動量 J が保存されるための条件を，ニュートンの運動方程式をもとに考えよう。力 $\vec{F}$ が時間とともになめらかに変化するとき，時刻 t に位置 (x,y) を速度 (v_x,v_y) で運動していた小球Aは，微小時間 Δt 後には位置 $(x+v_x\Delta t, y+v_y\Delta t)$ を速度 $\left(v_x+\dfrac{F_x}{m}\Delta t, v_y+\dfrac{F_y}{m}\Delta t\right)$ で運動している。この微小時間 Δt における J の変化を ΔJ とおく。Δt を限りなく小さくしたときの比 $\dfrac{\Delta J}{\Delta t}$ を x, y, v_x, v_y, F_x, F_y のうちの必要なものを用いて表し，その結果をもとに J が保存されるための条件を述べよ。

問 3.　xy 平面内で原点Oのまわりを，小球Aが反時計回りを正とする角速度 ω で半径 R の円運動をしているとき，小球Aの角運動量 J を m, R, ω で表せ。

問 4.　xy 平面内で原点Oのまわりを，半径 R の円運動をする小球Aの運動エネルギーを J, R, m だけの関数として表せ。

問 5.　ここまでの設問に対する結果をもとに，プランク定数を h として次の空欄ア～ウに当てはまる表式を答えよ。

質量 m の小球Aが xy 平面内で原点Oのまわりに半径 R を保って，正の角周波数（角速度）ω の円運動をする。このとき小球Aが電荷をもつならば，それは円運動と同じ角周波数の電磁波を発生する。電磁波は光子であるから，円運動する小球Aから角周波数 ω の光子が1個放出されることを考えよう。光子1個がもち去るエネルギーは，光量子説によれば ω を用いて $\boxed{\text{ア}}$ で与えられる。一方,この光子の放出で小球Aの角運動量 J が ΔJ だけ減少したとする。ここで小球Aの角運動量 J に比べて光子放出による角運動量変化 ΔJ がきわめて小さい場合を想定し，ΔJ に関して1次の変化のみを考える近似を用いることにしよう。小球Aのエネルギーが問4の結果で与えられるとしてこの近似を用いるならば，回転運動する小球Aが光子1個を放出して失うエネルギーは R や m には無関係に $\Delta J\times$ $\boxed{\text{イ}}$ と表される。すなわち，光子放出の前後で全エネルギーと全角運動量 J が保存されるならば，この光子1個がもち去る角運動量の大きさは R や m には無関係に $\boxed{\text{ウ}}$ と評価される。この評価は量子力学的には近似ではなく，厳密に成り立つことが示されており，ニュートン力学と量子力学との巨視的極限における整合を示す一例である。

2. 電場と磁場について，ⅠからⅣの設問に答えよ。

Ⅰ. 永久磁石がつくる磁場のある空間に，細い導線でできたコイルを置く。

問 1. 永久磁石を動かさずにコイルを動かしたところ，コイルに起電力が生じた。起電力が生じる仕組みはローレンツ力を用いてどのように説明できるかを示し，その説明をもとに起電力の大きさが導線の材質によらない理由を述べよ。なお，コイルに生じる電流がつくる磁場は考えない。

問 2. コイルを動かさずに永久磁石を動かしても，コイルに起電力が生じた。導線内の電子は静止しているので，ローレンツ力による説明はできない。そこで，コイル内の電子が力を受ける仕組みを導線内に生じる電場を用いてどのように説明できるかを示し，その説明をもとに起電力の大きさが導線の材質によらない理由を述べよ。なお，コイルに生じる電流がつくる磁場は考えない。

Ⅱ. 無重力の真空中にある3次元直交座標系において，強さ E で y 軸正の向きの一様な電場と，磁束密度の大きさ B で z 軸正の向きの一様な磁場の中を，小球Aが運動している（図2参照）。小球Aは xy 平面内を，質量 m，電荷 q をもった，大きさを無視できる質点として，ニュートンの運動方程式にしたがった運動をするものとし，その位置座標，速度，小球Aにはたらく力をそれぞれ2次元ベクトルを用いて $\vec{r}=(x,y)$, $\vec{v}=(v_x,v_y)$, $\vec{F}=(F_x,F_y)$ で表す。なお，小球Aの運動は光速 c に比べて十分遅いものとし，q,E,B は正の値とする。

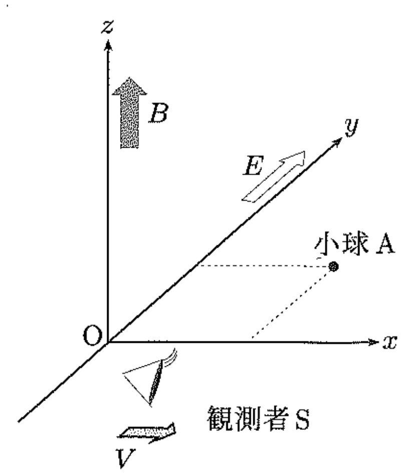

図2

問 1. 小球Aにはたらく力 $\vec{F}=(F_x,F_y)$ の各成分を v_x,v_y,q,E,B を用いて表せ。

問 2. x 軸正の向きに一定の速さ V で運動する観測者S（図2参照）から見ると，小球Aは，あたかも電場がゼロで，z 軸正の向きの一様な磁場の中を，半径 R の円運動をしているかのように見えたという。このときの V を E,B を用いて表せ。

問 3. 観測者Sから見た，小球Aの円運動の角速度 ω を求めよ。角速度の符号は，xy 平面を z 軸正の領域から見たとき，反時計回りを正とする。

問 4. 次に，観測者Sからではなく，図2における直交座標系から，小球Aの運動を見る。時刻0において $\vec{r}=\vec{v}=\vec{0}$ であったとして，時刻 t における小球Aの速度成分 v_x,v_y と位置座標 x,y を，問2と問3で求めた V,ω および t の関数として求めよ。

Ⅲ. 設問ⅠとⅡの内容は相互に密接に関連している。そこには電場や磁場のどのような性質が現れているか，考えるところを述べよ。

Ⅳ. ファラデーの電磁誘導の法則は，閉じた曲線状のコイルに生じる起電力の大きさが，コイルを辺縁とする曲面を貫く磁束の単位時間あたりの変化に比例することを述べている。ここにコイルを辺縁とする曲面の具体的形状を指定しないだけでなく，コイルや曲面が時間とともに変形する場合も除外されていない。したがって，真空中のコイルとそれを辺縁とする曲面はさまざまに考えることができる。すると真空中に単独で置かれた物体がもつ総磁気量についてどのようなことがいえるかを述べよ。ガウスの法則における電場を磁束密度でおきかえるとどうなるかを考えるとよい。概念説明のために必要であれば，解答欄内に図を描いてもよい。